



NOTE DE RECHERCHE

Retour à l'isotropie d'une turbulence homogène
en présence d'un gradient de température :
modélisation et simulation numérique.

L. Chouchane, R. Schiestel et T. Lili

Novembre 2006

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

Retour à l'isotropie d'une turbulence homogène en présence d'un gradient de température : modélisation et simulation numérique

L. Chouchane#, R. Schiestel* et T. Lili#

(*)Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre, Marseille

(#) Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie

Novembre 2006

Résumé :

Cette note considère l'étude de l'influence du retour à l'isotropie d'une turbulence cinématique initialement anisotrope sur l'évolution d'un champ turbulent de température. On effectue une approche par simulation numérique des grandes échelles ainsi que des modélisations statistiques. Les résultats sont comparés aux simulations directes de Iida et Kasagi à des nombres de Reynolds plus faibles. Ces données sont ensuite utilisées pour évaluer et perfectionner les modèles statistiques de retour à l'isotropie dû à la corrélation pression-gradient de température.

NOMENCLATURE

\mathbf{b}	Tenseur d'anisotropie
C_s	Constante de Smagorinsky
\mathbf{D}	Tenseur positif de Lumley $D_{ij} = \overline{\theta^2 u_i u_j} - \overline{\theta u_i} \overline{\theta u_j}$
$\widetilde{\mathbf{D}}$	Tenseur adimensionnel positif
$E(\vec{k})$	Spectre d'énergie
G	Fonction filtre
I	$I^2 = -1$
II_b	trace de \mathbf{b}^2
III_b	trace de \mathbf{b}^3
$II_{\widetilde{\mathbf{D}}}$	trace de $\widetilde{\mathbf{D}}^2/2$
$III_{\widetilde{\mathbf{D}}}$	trace de $\widetilde{\mathbf{D}}^3/3$
k	Module du nombre d'onde
K_c	Nombre d'onde de coupure
k_p	Maximum du spectre d'énergie
\vec{k}	Vecteur d'onde
p	Fluctuation de pression
P_r	Nombre de Prandtl
P_{rt}	Nombre de Prandtl turbulent

q	Energie cinétique de la simulation
S_{ij}	Taux de déformation moyen
T	Température instantanée
u_i	Fluctuation de vitesse partie petite échelle de la vitesse dans la direction i
\vec{x}	Vecteur position d'une particule fluide à l'instant t

Symboles grecs

Δ_A	Largeur du filtre
ϵ	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente
ϵ_{ii}	Composantes du tenseur de dissipation associé au tenseur de Reynolds
$\epsilon_{i\theta}$	Composantes du tenseur de dissipation associé au vecteur flux de chaleur
θ	Fluctuation de température
$\Lambda_{\theta j}$	Gradients de température moyenne
ν	Viscosité cinématique moléculaire
$\tilde{\nu}_e$	Viscosité moyenne turbulente

ν'_e	Viscosité fluctuante turbulente
ρ	Fluctuation de masse volumique
$\tilde{\sigma}_e$	Diffusivité moyenne turbulente
σ'_e	Diffusivité fluctuante turbulente
Φ_{ij}	Corrélations pression-déformation
$\Phi_{i\theta}$	Corrélations pression-gradient de température
Ψ_i	Fonction de courant vectorielle
Ψ_{iI}	Partie imaginaire de la fonction de courant vectorielle
Ψ_{iR}	Partie réelle de la fonction de courant vectorielle

Notations

$\overline{(\quad)}$	Quantité moyennée
$\widehat{(\quad)}$	Transformée de Fourier
$(\quad)_0$	Valeur initiale

1 Introduction

L'étude de l'influence du retour à l'isotropie d'une turbulence cinématique initialement anisotrope sur une turbulence thermique a été très peu abordée dans la littérature. Une telle étude a été effectuée par Iida et Kasagi [1] dans le cadre d'une simulation numérique directe où les conditions initiales d'anisotropie sont telles que $\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} < \overline{u_3^2}$, les composantes non diagonales du tenseur de Reynolds étant nulles, la turbulence thermique étant créée par un gradient moyen constant de température imposé dans la direction x_2 .

Le travail présenté dans cet article comprend deux parties. La première partie concerne la mise au point et la validation d'un code de simulation des grandes échelles (L.E.S.) par comparaison à la simulation directe (D.N.S.) de Iida et Kasagi [1].

La simulation des grandes échelles (L.E.S.) est une technique où les grandes et moyennes structures de la turbulence sont calculées directement alors que l'effet des petites structures est modélisé. Les modèles utilisés, appelés modèles de sous-maille car ils représentent l'action des échelles plus petites que la dimension de la maille, sont souvent testés à l'aide de comparaisons avec des résultats de simulation numérique directe (D.N.S.). Les grandes et petites échelles sont séparées par un filtre. Le filtre utilisé dans le code L.E.S. est le filtre passe-bas introduit naturellement par le maillage. En vue de valider l'approche L.E.S. mise au point, des comparaisons seront effectuées avec les résultats de simulation numérique directe de Iida et Kasagi [1].

La deuxième partie de ce travail concerne l'analyse de l'influence de l'anisotropie du champ cinématique sur la turbulence thermique, à partir des résultats de simulation L.E.S. et à travers un modèle statistique de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient de température $\Phi_{i\theta}$ proposé par Bouzaiane et Lili [2]. Ce modèle tient compte de manière explicite de l'anisotropie cinématique à travers des termes linéaires et quadratiques par rapport au tenseur d'anisotropie \mathbf{b} . Ces auteurs ont introduit des termes non linéaires par rapport au tenseur \mathbf{b} parce qu'il a bien été établi dans la littérature que le retour à l'isotropie de la turbulence cinématique est un processus non linéaire qui peut se répercuter sur la turbulence thermique.

Après une présentation de la méthode de simulation par L.E.S. les résultats de simulation issus de l'application de cette méthode sont analysés en les comparant aux résultats de Iida et Kasagi [1].

Par la suite et en vue d'analyser l'influence de l'anisotropie cinématique sur la turbulence thermique, les résultats de simulation L.E.S. sont utilisés pour évaluer les performances d'un modèle de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient de température proposé par Bouzaiane et Lili [2] et prenant en compte directement des termes linéaires et quadratiques par rapport au tenseur d'anisotropie \mathbf{b} .

2 Présentation de la méthode L.E.S. en turbulence homogène anisotrope

2.1 Equations de base

Une méthode L.E.S. basée sur une méthode pseudo-spectrale a été initialement mise au point à l'I.R.P.H.E. par Schiestel [3] pour décrire une turbulence homogène purement cinématique initialement anisotrope Schiestel [4]. Dans ce travail, le code a été étendu au cas d'une turbulence homogène cinématique initialement anisotrope évoluant en l'absence de gradient de vitesse moyenne mais accompagnée d'une turbulence thermique (scalaire passif) créée par un gradient moyen constant de température dans la direction x_2 . Les résultats de simulation utilisant ce code sont comparés aux résultats de simulation numérique directe de Iida et Kasagi [1].

La méthode est d'abord décrite succinctement.

Dans l'espace de Fourier, les équations de Navier-Stokes filtrées s'écrivent:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \widetilde{\nu}_e k^2 \widehat{u}_i = -Ik_m \Delta_{pi} (-\widehat{G} \widehat{u}_p \widehat{u}_m + \nu'_e \widehat{u}_{p,m} + \nu'_e \widehat{u}_{m,p}) \quad (1)$$

où $\widetilde{\nu}_e$ et ν'_e représentent respectivement la viscosité moyenne turbulente et la viscosité fluctuante turbulente de sous maille et \widehat{G} un filtre passe bas isotrope. Le tenseur Δ_{pi} est défini par: $\Delta_{pi} = \delta_{pi} - \frac{k_p k_i}{k^2}$. Enfin, la transformée de Fourier d'une grandeur f est notée \widehat{f} .

La modélisation de la turbulence de sous maille est basée sur une hypothèse de viscosité effective sous la forme moyennée suivante utilisée par Lilly [5]:

$$\tilde{\nu}_e = \nu + (C_s \Delta_A)^2 (S_{ij} S_{ij})^{1/2}$$

Dans cette expression, le tenseur S_{ij} représente le taux de déformation moyen. La largeur du filtre égale à $\Delta_A = \Pi/K_c$ où K_c est le nombre d'onde de coupure et C_s est la constante de Smagorinsky prise égale 0.22.

L'équation spectrale associée à la température filtrée se présente comme suit:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + \tilde{\sigma}_e k^2 \hat{\theta} = -\hat{u}_j \Lambda_{\theta j} + Ik_j [-\hat{u}_j \hat{\theta} + \sigma'_e \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_j} + \sigma'_e \hat{\Lambda}_{\theta j}] \quad (2)$$

$\tilde{\sigma}_e$ et σ'_e représentent respectivement la diffusivité thermique moyenne d'expression $\tilde{\sigma}_e = \frac{\nu}{P_r} + \frac{(\tilde{\nu}_e - \nu)}{P_{rt}}$ (P_r et P_{rt} étant respectivement le nombre de Prandtl et le nombre de Prandtl turbulent) et la diffusivité thermique fluctuante d'expression $\sigma'_e = \frac{\nu'_e}{P_{rt}}$ et $\Lambda_{\theta j}$ sont les gradients de température moyenne $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$. En fait, les résultats de simulation présentés dans la suite correspondent à un gradient moyen constant de température imposé dans la direction x_2 .

La technique de calcul utilise une méthode pseudo-spectrale et une grille de 64^3 points de discrétisation. La viscosité cinématique adimensionnelle ν et le nombre de Prandtl ont pour valeurs $\nu = 0.00294$ et $P_r = 0.7$. Des conditions aux limites périodiques sont imposées aux frontières d'un cube d'arête $L = 2\pi$. Le spectre d'énergie initial est pris sous la forme suivante:

$$E(k) = \frac{q_0 k}{k_p^2} \exp\left(-\frac{k}{k_p}\right)$$

où k est le module du nombre d'onde. L'énergie cinétique q_0 est prise égale à 0.29 et le maximum du spectre d'énergie correspond à $k_p = 4.12$. Ces conditions initiales sont analogues à celles utilisées par Iida et Kasagi [1].

La normalisation des quantités adimensionnelles présentées ci-dessus, est faite par rapport à k_1 , nombre d'onde du premier point de maillage et U la vitesse moyenne constante de référence du fluide. Ainsi, on suppose que $\frac{q_0}{U^2} = 0.29$ et comme $k_j = \frac{2\pi}{L}j$, $j=1..n$, on obtient $k_1 = 1$.

2.2 Génération des conditions initiales anisotropes

Les conditions initiales correspondent à un champ de vitesse aléatoire à divergence nulle. En pratique, un tel champ initial, peut être réalisé en raisonnant sur la fonction de courant vectorielle Ψ_i en tirant deux champs de vecteurs réels équirépartis sur la sphère de rayon unité $\widehat{\Psi}_{iR}$ et $\widehat{\Psi}_{iI}$ dans le demi espace spectral $k_1 \geq 0$ et rechercher un champ de vitesse de la forme:

$$\widehat{u}_i = Ik_j \epsilon_{jkm} \widehat{\Psi}_k \text{ avec } \widehat{\Psi}_k = a\widehat{\Psi}_{kR} + Ib\widehat{\Psi}_{kI}$$

Les fonctions aléatoires a et b sont choisies de telle sorte que l'énergie cinétique soit répartie selon un spectre tridimensionnel donné $E(k)$. L'extension de la fonction de courant vectorielle à l'espace entier se fait à l'aide de la relation $\widehat{\Psi}_k(-\vec{k}) = \widehat{\Psi}_k(\vec{k})$

(Roy [6]).

Pour obtenir le spectre tridimensionnel d'énergie $E(k)$, on calcule les corrélations:

$$\begin{aligned}\overline{\hat{u}_i(\vec{k})\hat{u}_i^*(\vec{k})} &= \overline{\hat{u}_i(\vec{k})\hat{u}_i(\vec{k})} \\ &= \mathcal{M}od_R + \mathcal{M}od_I\end{aligned}$$

$$\text{où } \mathcal{M}od_R = (k_2\hat{\Psi}_{3R} - k_3\hat{\Psi}_{2R})^2 + (k_3\hat{\Psi}_{1R} - k_1\hat{\Psi}_{3R})^2 + (k_1\hat{\Psi}_{2R} - k_2\hat{\Psi}_{1R})^2$$

$$\text{et } \mathcal{M}od_I = (k_2\hat{\Psi}_{3I} - k_3\hat{\Psi}_{2I})^2 + (k_3\hat{\Psi}_{1I} - k_1\hat{\Psi}_{3I})^2 + (k_1\hat{\Psi}_{2I} - k_2\hat{\Psi}_{1I})^2$$

$$\text{d'où } \overline{\hat{u}_i(\vec{k})\hat{u}_i^*(\vec{k})} = \frac{E(k)}{Lk^2}$$

Les coefficients a et b intervenant dans l'écriture de $\hat{\Psi}_i$ s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}a &= \left(\frac{E}{Lk^2}\right)^{\frac{1}{2}} / \mathcal{M}od_R^{\frac{1}{2}} \times \cos\lambda \\ b &= \left(\frac{E}{Lk^2}\right)^{\frac{1}{2}} / \mathcal{M}od_I^{\frac{1}{2}} \times \sin\lambda\end{aligned}$$

λ étant un nombre au hasard compris entre 0 et 2π .

Ainsi, on obtient la relation suivante:

$$\hat{u}_1^2 + \hat{u}_2^2 + \hat{u}_3^2 = \frac{E}{Lk^2}$$

Dans le but de créer une turbulence initialement anisotrope, la méthode que nous avons utilisée consiste à multiplier la composante \hat{u}_3 de la vitesse par une constante α en imposant la condition suivante:

$$\text{pour } k_3 = 0 \text{ on obtient } \underbrace{\hat{u}_3}_{\text{anisotrope}} \text{ en effectuant le produit } \underbrace{\hat{u}_3}_{\text{isotrope}} \times \alpha$$

avec la condition relative à la continuité: $k_1\hat{u}_1 + k_2\hat{u}_2 + k_3\hat{u}_3 = 0$ qui doit toujours rester vraie.

On notera que d'après l'orientation des vitesses dans le repère de Craya, la contribution de \hat{u}_3 est d'autant plus forte que l'on s'approche de l'équateur défini par $k_3 = 0$ sur la sphère de rayon k . Si de plus on a: $k_3 \hat{u}_3 = 0$ alors sa modification n'a aucune influence sur la continuité.

3 Comparaison aux résultats de simulation numérique directe de Iida et Kasagi

Les résultats de simulation en L.E.S. sont confrontés aux résultats de simulation numérique directe de Iida et Kasagi [1].

Ce sont les rares résultats de la littérature scientifique qui décrivent le retour à l'isotropie d'une turbulence cinématique initialement anisotrope accompagnée d'une turbulence thermique produite par un gradient moyen constant de température (imposé dans la direction x_2). L'intérêt de l'analyse d'une telle turbulence est qu'elle permet d'apprécier l'influence de l'anisotropie cinématique sur l'évolution de la turbulence thermique et en particulier sur la partie de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient de température.

Les résultats de Iida et Kasagi [1] présentent cependant l'inconvénient (inhérent aux calculs de simulation numérique directe) de traiter des nombres de Reynolds relativement

faibles.

Précisons que dans l'application en L.E.S., les conditions initiales sont choisies conformément aux conditions retenues par Iida et Kasagi [1], de manière à obtenir des tensions de Reynolds normales vérifiant:

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} < \overline{u_3^2},$$

tandis que les composantes non diagonales du tenseur de Reynolds restent nulles.

Sur les figs.1 - 7, on compare les résultats de calcul utilisant le code L.E.S. aux résultats de simulation numérique directe de Iida et Kasagi [1]. Ces figures montrent successivement l'évolution dans le temps de $\overline{u_2^2}$, de Φ_{22} , de ε_{22} , de $\overline{u_2\theta}$, de $\Phi_{2\theta}$, de $P_{2\theta}$ et enfin de $\varepsilon_{2\theta}$. Pour les corrélations doubles $\overline{u_2^2}$ et $\overline{u_2\theta}$, l'accord entre résultats L.E.S. et D.N.S. est relativement bon (figs 1 - 4). Pour les corrélations faisant intervenir la fluctuation de pression, à savoir Φ_{22} et $\Phi_{2\theta}$, un bon accord est observé pour $t > 2.5$ et un écart appréciable demeure pour $t < 2.5$. La même remarque prévaut pour la composante ε_{22} du tenseur de dissipation associé au tenseur de Reynolds (fig.3) et pour la composante $\varepsilon_{2\theta}$ de la dissipation associée au vecteur flux de chaleur. Ces écarts montrent que le modèle de Smagorinsky dans la simulation L.E.S. ne peut rendre compte de l'influence manifeste des faibles nombres de Reynolds qui apparaît clairement dans les résultats de simulation D.N.S. C'est bien évidemment la modélisation des petites structures qui est en cause dans la simulation de type L.E.S. En effet, le modèle de Smagorinsky a été utilisé sous la forme classique

indépendante de la viscosité du fluide. A titre d'illustration, les figs. 8 et 9 montrent l'évolution dans le temps des composantes diagonales ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} du tenseur de dissipation associé au tenseur de Reynolds et les composantes $\varepsilon_{1\theta}$, $\varepsilon_{2\theta}$, $\varepsilon_{3\theta}$ de la dissipation associée au flux de chaleur. Ces figures confirment bien l'anisotropie des flux énergétiques qui tend cependant à s'estomper (sauf pour $\varepsilon_{2\theta}$) pour $t > 2.5$.

4 Etude d'un modèle non linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient de température

Les résultats précédents vont maintenant servir à étudier un modèle statistique non linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient de température.

4.1 Présentation du modèle

Bouzaiane et Lili [2] ont proposé et étudié un modèle non linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient de température $\Phi_{i\theta} = -\frac{\overline{p}\theta_{,i}}{\rho}$ en vue de la prévision numérique des statistiques d'un champ scalaire passif (fraction massique, température) à grands nombres de Reynolds et de Peclet. Ce modèle se présente sous la forme générale:

$$\Phi_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{2\bar{q}}(C_1\overline{\theta u_i} + (C_2 b_{ij} + C_3 b_{ij}^2)\overline{\theta u_j}) \quad (3)$$

où b_{ij} sont les composantes du tenseur d'anisotropie \mathbf{b} , $b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2\bar{q}} - \frac{\delta_{ij}}{3}$ et où ε est le

taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente q .

Ce modèle prend en compte directement l'anisotropie du champ cinématique à travers des termes linéaires et non linéaires en fonction du tenseur d'anisotropie \mathbf{b} . La mise en évidence expérimentale des effets non linéaires dans le processus de retour à l'isotropie d'une turbulence cinématique homogène a amené certains auteurs à proposer un modèle non linéaire pour représenter la partie de retour à l'isotropie des corrélations pression-déformation $\Phi_{ij} = -\frac{\overline{p}}{\rho}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (c'est le cas du modèle de Sarkar et Speziale [7]).

Dans un souci de cohérence, il est apparu naturel à Bouzaiane et Lili [2] d'inclure dans le modèle qu'ils ont proposé pour $\Phi_{i\theta}$ des termes quadratiques par rapport au tenseur \mathbf{b} .

Précisons enfin que les coefficients C_1, C_2, C_3 de ce modèle dépendent à priori des invariants indépendants qui peuvent être construits à partir du tenseur \mathbf{b} et du vecteur $\overline{u\theta}$.

4.2 Condition de réalisabilité

Bouzaiane et Lili [2] ont étudié la relaxation d'une turbulence homogène cinématique et thermique initialement anisotrope et évoluant en l'absence de gradients moyens de vitesse et de scalaire en utilisant le modèle (3) qu'ils proposent pour $\Phi_{i\theta}$ et le modèle de Sarkar et Speziale [7] pour exprimer Φ_{ij} :

$$\Phi_{ij} = -\varepsilon(\alpha_1 b_{ij} - \alpha_2 (b_{ij}^2 - \frac{II_b}{3} \delta_{ij}))$$

Dans ce modèle, l'invariant II_b est la trace de \mathbf{b}^2 et les coefficients α_1 et α_2 sont des constantes: $\alpha_1 = 3.4$, $\alpha_2 = 3(\alpha_1 - 2)$. Le modèle de Sarkar et Speziale est un modèle relativement simple qui permet de traduire l'essentiel des effets non linéaires mis en évidence expérimentalement.

Lumley [8] a été le premier à étudier le problème de la réalisabilité des flux turbulents de scalaire et il a considéré à cet effet le tenseur positif \mathbf{D} défini par:

$$D_{ij} = \overline{\theta^2 u_i u_j} - \overline{\theta u_i} \overline{\theta u_j}$$

Bouzaiane et Lili [2] ont introduit les invariants associés au tenseur \mathbf{D} :

$$\bar{I}_D = \text{tr}(\mathbf{D}), \quad \overline{II}_D = \frac{1}{2}(\bar{I}_D^2 - \text{tr}(\mathbf{D}^2)),$$

et les invariants adimensionnels correspondants:

$$\widetilde{\bar{I}}_D = \frac{\bar{I}_D}{2\bar{q}\theta^2}, \quad \widetilde{\overline{II}}_D = \frac{\overline{II}_D}{(2\bar{q}\theta^2)^2}$$

ainsi que l'invariant classique F :

$$F = 1 - \frac{9}{2}II_b + 9III_b$$

où III_b est la trace de \mathbf{b}^3 .

Ils ont alors établi une condition générale de réalisabilité qui se présente sous la forme:

$$g = C_1 - r - 1 + \frac{2}{3}C_2 + \frac{4}{9}C_3 - (C_2 + \frac{C_3}{3} + \frac{3}{2}(\alpha_1 - 1))\widetilde{\bar{I}}_D + C_3(\frac{\overline{II}_b}{2} - \frac{1}{3} + \widetilde{\overline{II}}_D) + (\alpha_1 - 2)(\frac{1}{3} - \frac{\overline{II}_b}{2})\frac{27\widetilde{\overline{II}}_D}{F} \geq 0 \quad (4)$$

où r est le rapport des temps cinématique et scalaire: $r = \frac{2\bar{q}/\varepsilon}{\theta^2/\varepsilon_\theta}$.

4.3 Optimisation numérique du choix des coefficients du modèle

On a effectué deux types d'optimisation qui consistent à minimiser l'écart entre les résultats obtenus en utilisant le modèle (3) relatif à $\Phi_{i\theta}$ et ceux issus de la simulation numérique de type L.E.S. et présentés précédemment. Dans l'optimisation de type (1) (cas 1) les écarts considérés concernent directement les flux thermiques $\overline{u_i\theta}$ et dans l'optimisation de type (2) (cas 2 et 3) les écarts considérés s'appliquent aux corrélations pression-gradient de température $\Phi_{i\theta}$.

Optimisation de type (1) (cas 1)

Cette procédure d'optimisation consiste d'abord à intégrer numériquement, et pour des temps $t_n = (n - 1)\Delta t$ correspondant aux résultats de simulation numérique de type L.E.S. ($n=1, \dots, 1001$, $\Delta t = 10^{-2}$), l'équation d'évolution des flux de chaleur $\overline{u_i\theta}$ écrite sous la forme:

$$\frac{d}{dt}\overline{u_i\theta} = \Phi_{i\theta} + P_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$$

$\Phi_{i\theta}$ étant exprimé à l'aide du modèle (3). Le schéma numérique retenu est un schéma de différences finies de type Crank-Nicolson:

$$\frac{\overline{u_i\theta}^{n+1} - \overline{u_i\theta}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\Phi_{i\theta}^{n+1} + \frac{1}{2}\Phi_{i\theta}^n + P_{i\theta}^{n+1/2} - \varepsilon_{i\theta}^{n+1/2} \quad (5)$$

Ce schéma conduit à chaque instant t_{n+1} , à un système linéaire de la forme:

$\alpha_{ij}\overline{u_j\theta} = a_i$ ($i,j=1,2,3$) où les éléments de matrice α_{ij} et a_i sont donnés par:

$$\alpha_{jj} = 1 + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2\bar{q}}\right)^{n+1} [C_1 + C_2 b_{jj}^{n+1} + C_3 b_{jj}^{2, n+1}] \quad (\text{sans sommation sur } j)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2\bar{q}} \right)^{n+1} [C_2 b_{ij}^{n+1} + C_3 b_{ij}^{2n+1}] \quad (i \neq j)$$

$$a_i = \overline{u_i \theta^n} + \frac{\Delta t}{2} \Phi_{i\theta}^n + \Delta t P_{i\theta}^{n+1/2} - \Delta t \varepsilon_{i\theta}^{n+1/2}$$

Les éléments de matrice α_{ij} sont déterminés à partir des résultats de simulation L.E.S. correspondant à ε , $2\bar{q}$, b_{ij} et b_{ij}^2 ; les éléments de matrice a_i sont aussi déterminés à partir des résultats de simulation L.E.S. correspondant à ε , $2\bar{q}$, b_{ij} , b_{ij}^2 , $P_{i\theta}$ et $\varepsilon_{i\theta}$. Indiquons que la résolution de ce système linéaire est très facile dès l'instant où la matrice d'éléments α_{ij} est à diagonale dominante. Aussi, cette procédure d'intégration et par la suite d'optimisation ne concerne que le modèle utilisé pour $\Phi_{i\theta}$ et s'affranchit de tout autre approximation issue d'un autre modèle (tels que modèles pour Φ_{ij} , ε_{ij} , $\varepsilon_{i\theta}$). En fait, le schéma d'intégration numérique (5) est appliqué aux instants t_n n allant de 251 à 1001. En effet, on n'a pas considéré les instants t_n , $n=1, \dots, 250$ parce que ceux-ci correspondent à une anisotropie très marquée du processus de transfert apparaissant clairement sur les courbes d'évolution de ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , $\varepsilon_{1\theta}$, $\varepsilon_{2\theta}$, $\varepsilon_{3\theta}$ et due essentiellement aux faibles nombres de Reynolds de l'écoulement. De plus, la période initiale est beaucoup plus sensible à de faibles écarts sur les conditions initiales (répartition spectrale). Pour des instants t_n , $n=251, \dots, 1001$, cette anisotropie tend à s'estomper.

Enfin, la procédure d'optimisation de type (1) (cas 1) consiste à choisir un ensemble de valeurs des constantes C_1 , C_2 et C_3 du modèle (3) relatif à $\Phi_{i\theta}$ qui minimise l'écart:

$$e_1 = \sum_{n=250}^{1001} \sum_{i=1}^3 (\overline{u_i \theta} - \overline{u_i \theta}^{L.E.S.})$$

et qui satisfait la condition de réalisabilité (4):

$$g(t_i) \geq 0, \quad i = 251, \dots, 1001.$$

Cette procédure d'optimisation de type (1) a fourni les valeurs optimales suivantes (cas 1):

$$C_1 = 7.75, \quad C_2 = -3, \quad C_3 = -3.75.$$

Optimisation de type (2) (cas 2 et 3)

Cette procédure d'optimisation de type (2) consiste à choisir un ensemble de valeurs de C_1, C_2, C_3 qui minimise l'écart:

$$e_2 = \sum_{n=250}^{1001} \sum_{i=1}^3 (\Phi_{i\theta} - \Phi_{i\theta}^{L.E.S.}).$$

En imposant la condition de réalisabilité (4) sous la forme:

$$g(t_i) \geq 0, \quad i = 251, \dots, 1001,$$

on obtient les valeurs optimales suivantes correspondant au cas 2:

$$C_1 = 4.5, \quad C_2 = -4.75, \quad C_3 = 0.$$

Si l'on n'impose pas la condition de réalisabilité $g(t_i) \geq 0, i=251, \dots, 1001$, on obtient les valeurs optimales correspondant au cas 3:

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 5, \quad C_3 = -6.$$

Pour ces deux cas, la procédure d'intégration (5) présentée précédemment permet d'obtenir l'évolution dans le temps (pour $t_n, n=251, \dots, 1001$) des flux de chaleur $\overline{u_i\theta}$.

4.4 Analyse des résultats relatifs au modèle

Considérons d'abord les résultats correspondant aux valeurs optimales des constantes C_1, C_2, C_3 obtenues à l'issue de l'optimisation de type (1) (cas 1) qui, rappelons-le, vérifient la condition de réalisabilité (4).

La fig.10 montre effectivement une bonne concordance (compatible avec la procédure d'optimisation) entre les flux de chaleurs issus de l'application du modèle pour $\Phi_{i\theta}$ et ceux obtenus lors de la simulation de type L.E.S. Concernant les résultats relatifs à l'évolution des $\Phi_{i\theta}$, l'accord est moins bon notamment pour la composante $\Phi_{2\theta}$ comme le montre la fig.11.

Les variations de l'invariant $II_{\tilde{D}} = \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{D}^2)$ en fonction de l'invariant $III_{\tilde{D}} = \frac{1}{3}\text{tr}(\tilde{D}^3)$ (\tilde{D}) est défini par: $\tilde{D}_{ij} = \frac{D_{ij}}{\text{tr}(D)} - \frac{\delta_{ij}}{3}$ sont présentés fig.12. Le point représentatif correspondant aux flux de chaleur $\overline{u_i\theta}$ issus de l'application du modèle avec les valeurs optimales des constantes C_1, C_2, C_3 (cas 1) reste manifestement à l'intérieur du triangle de réalisabilité de Lumley. Ce résultat qui apparaît clairement sur la fig.12 confirme la condition de réalisabilité ($g \geq 0$) obtenue par Bouzaiane et Lili [1].

Si l'on considère maintenant la procédure d'optimisation de type (2) qui est effectuée sur la base des $\Phi_{i\theta}$, l'évolution des flux de chaleur $\overline{u_i\theta}$ montre des écarts sensibles entre résultats issus de l'application du modèle et résultats de simulation L.E.S., notamment pour le cas 3, comme le montrent les figs. 13 et 16. Evidemment, l'accord entre résultats

relatifs à $\Phi_{i\theta}$ est bon notamment pour le cas 2 (qui correspond à une optimisation avec condition imposée de réalisabilité) comme le montrent les figs. 14 et 17.

Enfin, sur les figs. 15 et 18, on a tracé les variations de l'invariant $II_{\tilde{D}}$ en fonction de l'invariant $III_{\tilde{D}}$. Une fois de plus, le point figuratif dans le cas 2 reste à l'intérieur du triangle de réalisabilité de Lumley et ceci n'est manifestement pas le cas lorsqu'on considère les résultats du cas 3 qui ne vérifie pas la condition de réalisabilité. Les deux cas 2 et 3 de la procédure d'optimisation de type (2) ont été envisagés dans le but de confirmer cette condition de réalisabilité.

Il est entendu, évidemment, que les meilleurs résultats sont ceux correspondant à la procédure d'optimisation de type (1) (cas 1) qui a conduit aux valeurs optimales $C_1 = 7.75$, $C_2 = -3$, $C_3 = -3.75$.

Pour terminer, on a cherché à estimer l'influence des termes en b_{ij} et b_{ij}^2 intervenant dans le modèle de $\Phi_{i\theta}$. Pour ce faire, on a effectué deux optimisations de type (1) (minimisation de l'écart relatif à $\overline{u_i\theta}$ sans condition de réalisabilité (4)). Dans le cas 4, on a imposé $C_3 = 0$ et obtenu les valeurs optimales $C_1 = 7.75$, $C_2 = -7.25$; dans le cas (5), on a pris $C_2 = C_3 = 0$ et obtenu la valeur optimale $C_1 = 9$.

Les figs. 19 et 20 montrent l'évolution dans le temps des invariants $II_{\tilde{D}}$ et $III_{\tilde{D}}$ correspondant au cas 5 ($C_2 = C_3 = 0$, $C_1 = 9$) au cas 4 ($C_1 = 7.75$, $C_2 = -7.25$, $C_3 = 0$) et au cas 1 ($C_1 = 7.75$, $C_2 = -3$, $C_3 = -3.75$) et aux résultats de type L.E.S. Il apparaît

clairement que les termes en b_{ij} intervenant dans le modèle (3) de $\Phi_{i\theta}$ apportent une certaine amélioration aux résultats traduisant ce modèle; les termes en b_{ij}^2 n'ont par contre pratiquement pas d'influence sur les résultats. Ainsi, dans le cadre de l'application envisagée, la prise en compte de l'anisotropie à travers des termes linéaires par rapport au tenseur \mathbf{b} , dans la modélisation de la partie de retour à l'isotropie de $\Phi_{i\theta}$, apporte une meilleure représentation de la turbulence thermique alors que les termes quadratiques par rapport à \mathbf{b} n'ont aucune influence sensible dans ce cas particulier.

5 Conclusion

Une approche L.E.S. a été mise en oeuvre pour décrire le retour à l'isotropie d'une turbulence cinématique initialement anisotrope accompagnée d'une turbulence thermique créée par un gradient moyen constant de température.

Les résultats de simulation utilisant ce code ont été comparés aux résultats de simulation numérique directe de Iida et Kasagi (gradient moyen de température imposé dans la direction x_2). Les résultats de D.N.S. de Iida et Kasagi, tout en traitant des nombres de Reynolds faibles, présentent l'intérêt de permettre d'apprécier a priori l'influence de l'anisotropie cinématique (caractérisée par le tenseur d'anisotropie \mathbf{b}) sur l'évolution de la turbulence thermique. La comparaison entre ces résultats de simulation D.N.S. et L.E.S.

confirme que le modèle de Smagorinsky ne peut décrire correctement une turbulence où les effets des faibles nombres de Reynolds, qui se traduisent notamment sur le processus de dissipation, sont suffisamment marqués. Cette comparaison donne lieu cependant à un accord satisfaisant lorsque l'anisotropie des structures dissipatives tend à s'estomper.

A la suite de la comparaison aux résultats de D.N.S. de Iida et Kasagi, les résultats L.E.S. ont servi à étudier un modèle de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient de température $\Phi_{i\theta}$. Il s'agit du modèle proposé par Bouzaiane et Lili prenant en compte, à grand nombres de Reynolds, l'anisotropie du champ cinématique à travers des termes linéaires et quadratiques par rapport au tenseur d'anisotropie \mathbf{b} .

Différentes optimisations numériques des coefficients supposés constants de ce modèle ont été effectuées en vue de minimiser l'écart entre résultats issus de ce modèle et résultats L.E.S., les résultats étant relatifs soit aux flux de chaleur $\overline{u_i\theta}$ et fournissent alors les valeurs optimales des coefficients du modèle pour $\Phi_{i\theta}$, soit aux corrélations $\Phi_{i\theta}$ elles-mêmes. Ces optimisations, effectuées en tenant compte ou pas de la condition de réalisabilité établie par Bouzaiane et Lili ont permis de confirmer la validité de cette condition de réalisabilité.

Enfin, une analyse fine des résultats du modèle a révélé que, pour l'application particulière envisagée et dans le modèle pour $\Phi_{i\theta}$, les termes linéaires par rapport au tenseur \mathbf{b} apportent une certaine amélioration aux résultats de ce modèle, alors que les termes non linéaires par rapport à \mathbf{b} n'ont pratiquement aucune influence.

Ce travail de recherche doit être poursuivi dans deux directions: améliorer la modélisation des petites structures de façon à ce que le code L.E.S. puisse représenter correctement l'anisotropie de celle-ci à faibles nombres de Reynolds et incorporer dans le modèle de retour à l'isotropie de la corrélation $\Phi_{i\theta}$ des corrections de bas nombres de Reynolds.

REFERENCES

1. O. Iida, N. Kasagi, Redistribution of the Reynolds stresses and destruction of the turbulent heat flux in homogeneous decaying turbulence. *Ninth Symposium On Turbulent Shear Flows*, Kyoto, Japan, 24-4-1,24-4-6 (1993).
2. M. Bouzaiane, T. Lili , Réalisabilité d'un schéma non linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient d'un scalaire. *Rev.Gen.Therm.***37**,371-383 (1998).
3. R. Schiestel, *Les écoulements turbulents:Modélisation et simulation*. 2^e édition revue et augmentée (1998).
4. R. Schiestel, Sur la modélisation des écoulements turbulents en non équilibre spectral. C.R.Acad.Sc. Paris, t. 302,Série II, n11,pp 327-730 (1986).
5. D.K. Lilly, Numerical simulation of developping and decaying two-dimensional turbulence. *J.Fluid.Mech.*, Vol 45,2,395 (1971).
6. P. Roy, *La Rech. Aerosp.*, n6, 373-385 (1980).
7. S. Sarkar, C.G. Speziale, *Phys. Fluids A₂* (1) 84 (1990).
8. J.L. Lumley, *Adv. Appl. Mech.* 18, 123 (1978).

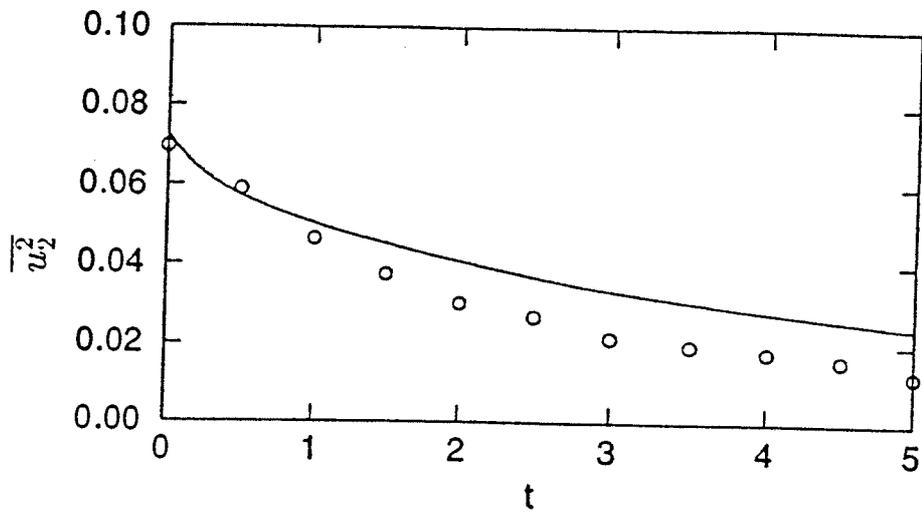


Fig. 1. Evolution temporelle de la composante $\overline{u_2^2}$ du tenseur de Reynolds:

—, $\overline{u_2^2}$ LES; o, $\overline{u_2^2}$ DNS.

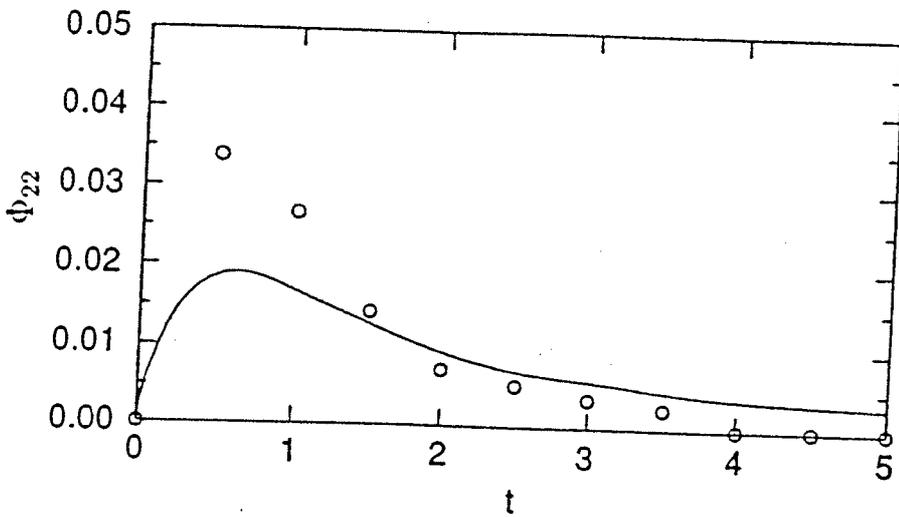


Fig.2. Evolution temporelle de la composante Φ_{22} du tenseur pression-déformation:

—, Φ_{22} LES; o, Φ_{22} DNS.

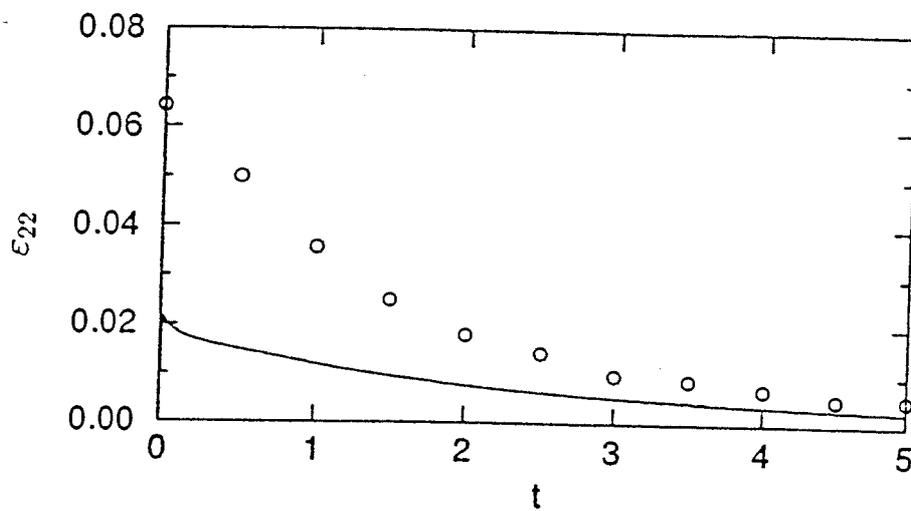


Fig.3. Evolution temporelle de la composante ε_{22} du tenseur de dissipation:

—, ε_{22} LES; ○, ε_{22} DNS.

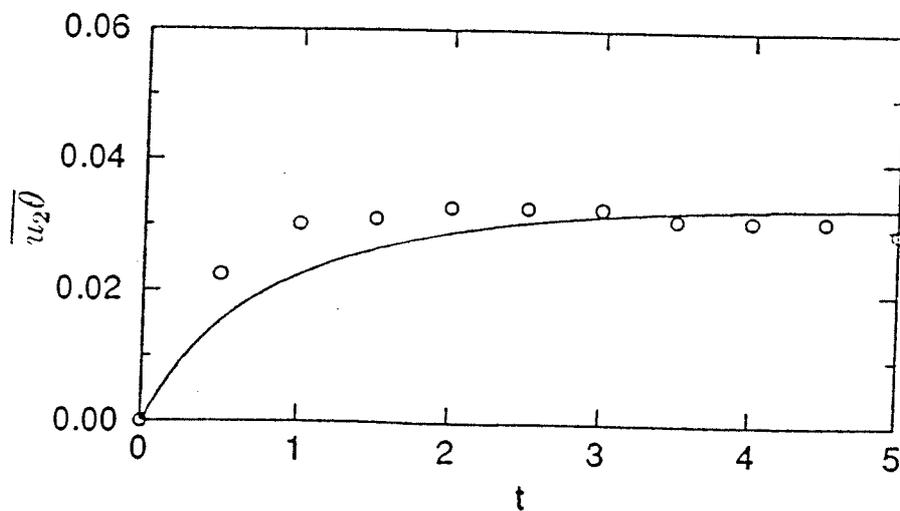


Fig.4. Evolution temporelle du flux de chaleur turbulent $\overline{u_2\theta}$:

—, $\overline{u_2\theta}$ LES; ○, $\overline{u_2\theta}$ DNS.

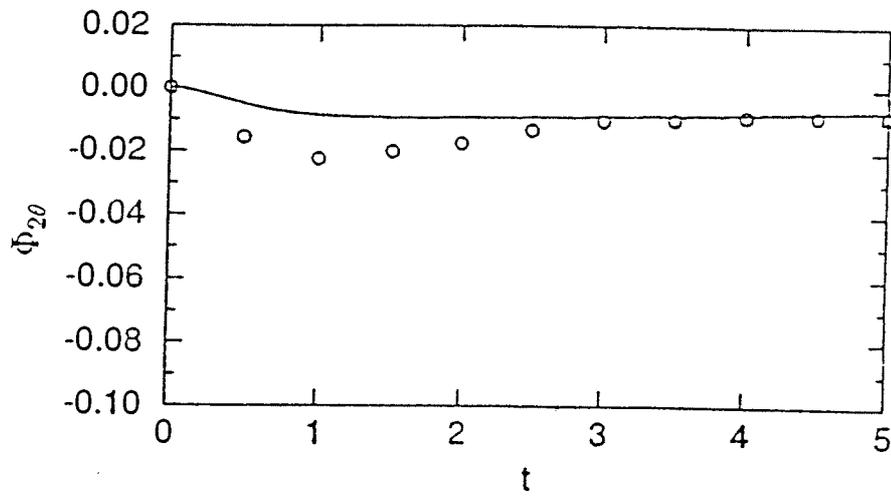


Fig.5. Evolution temporelle du terme de corrélation pression-gradient de température

Φ_{20} :

— , Φ_{20} LES; o , Φ_{20} DNS.

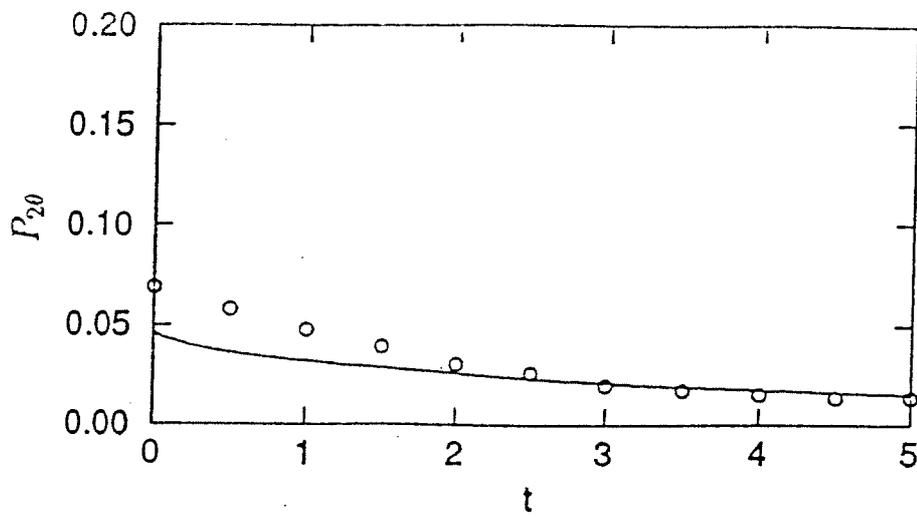


Fig.6. Evolution temporelle du terme de production P_{20} :

— , P_{20} LES; o , P_{20} DNS.

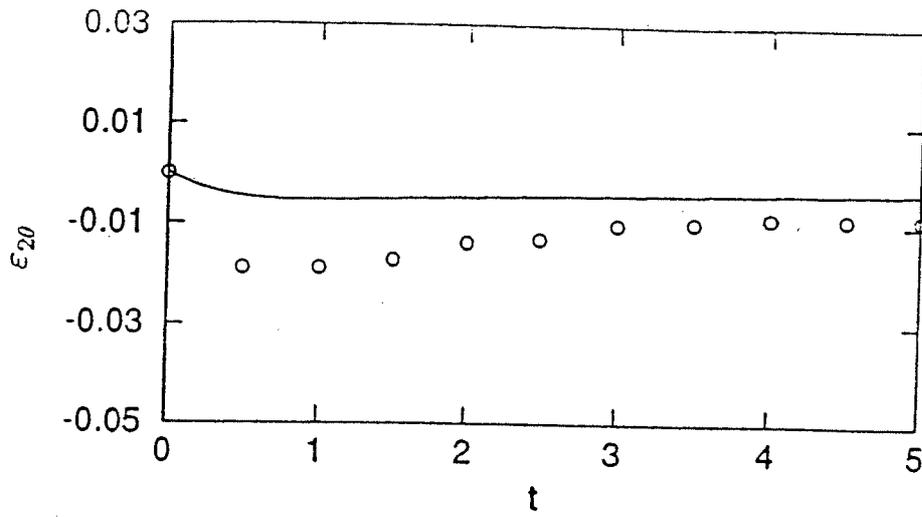


Fig.7. Evolution temporelle du termes de dissipation thermique ϵ_{20} :

—, ϵ_{20} LES; ○, ϵ_{20} DNS.

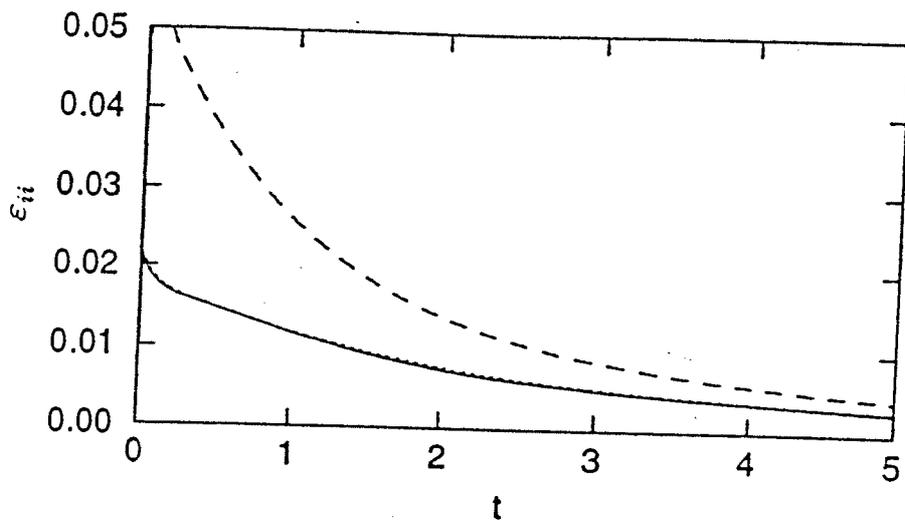


Fig.8. Evolution temporelle des termes diagonaux du tenseur de dissipation ϵ_{ii} :

—, ϵ_{11} ; ····, ϵ_{22} ; - - -, ϵ_{33} .

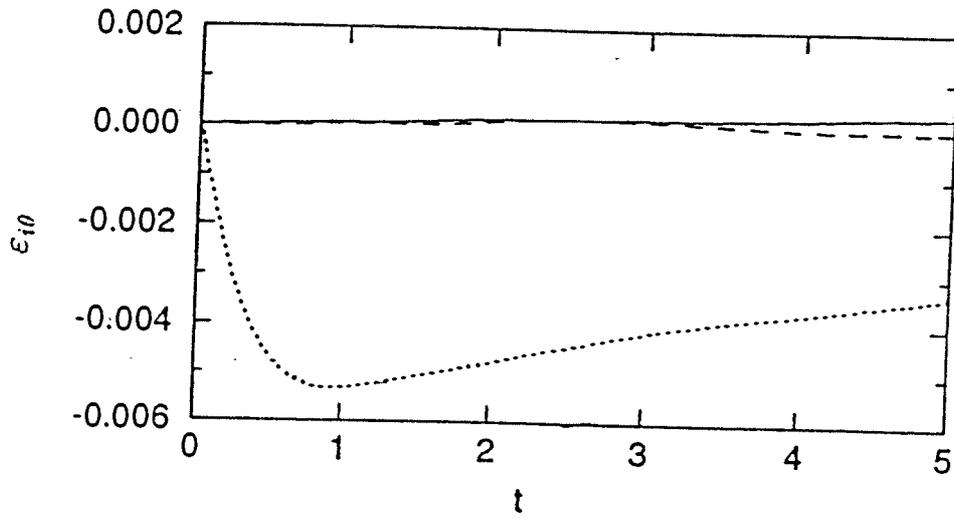


Fig.9. Evolution temporelle des termes de dissipation thermique $\epsilon_{i\theta}$:

—, $\epsilon_{1\theta}$; ····, $\epsilon_{2\theta}$; ---, $\epsilon_{3\theta}$.

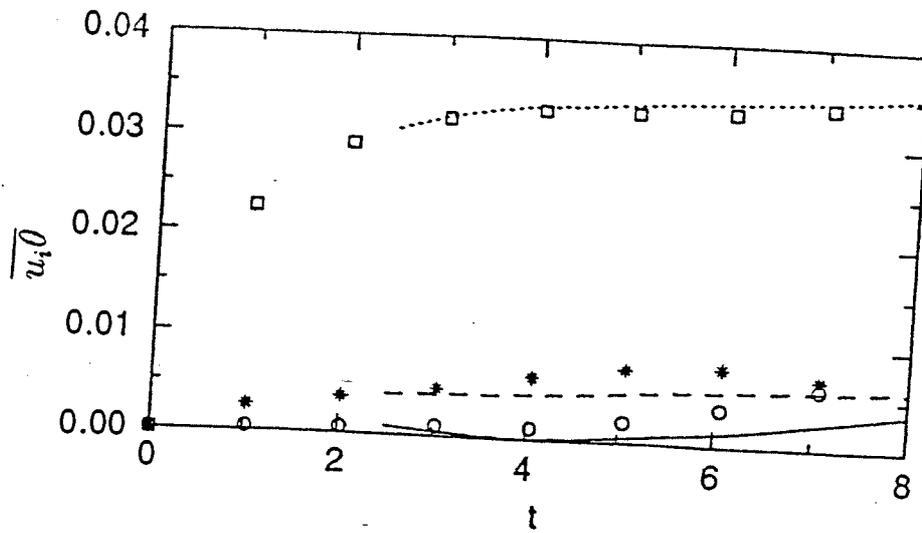


Fig.10. Evolution temporelle des flux thermiques turbulents $\overline{u_i\theta}$. Cas 1:

○, $\overline{u_1\theta}$ LES; ◊, $\overline{u_2\theta}$ LES; *, $\overline{u_3\theta}$ LES,

—, $\overline{u_1\theta}$ modèle; ····, $\overline{u_2\theta}$ modèle; ---, $\overline{u_3\theta}$ modèle.

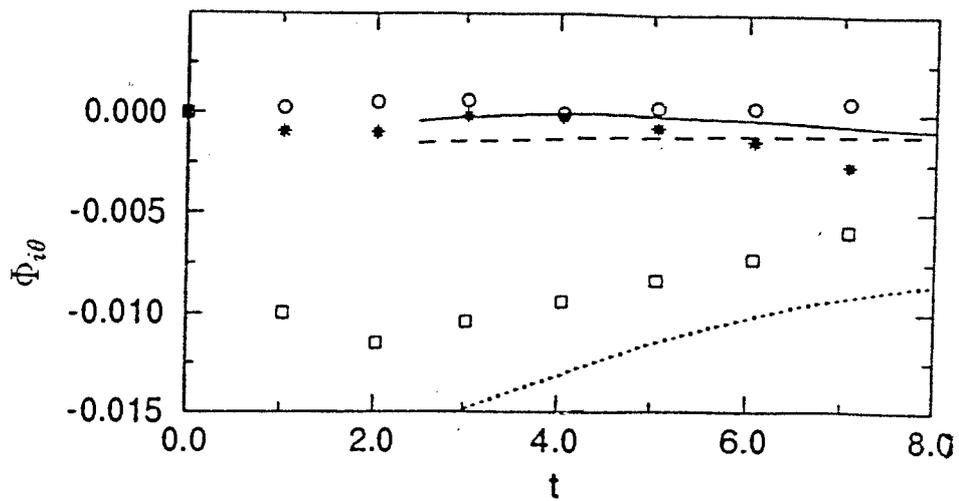


Fig.11. Evolution temporelle des corrélations pression-gradient de température $\Phi_{i\theta}$.

Cas 1:

○, $\Phi_{1\theta}$ LES; ◊, $\Phi_{2\theta}$ LES; *, $\Phi_{3\theta}$ LES,

—, $\Phi_{1\theta}$ modèle; ····, $\Phi_{2\theta}$ modèle; ---, $\Phi_{3\theta}$ modèle.

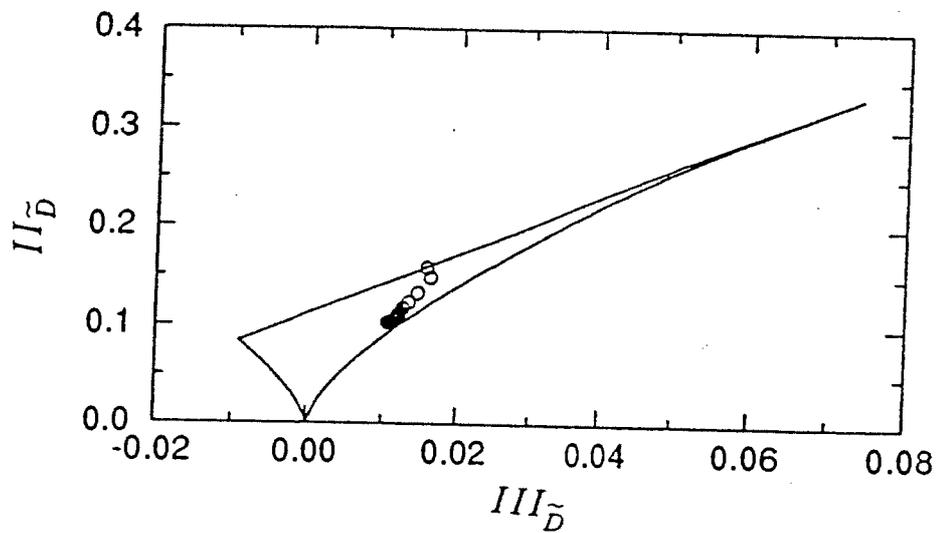


Fig.12. Diagramme de réalisabilité de Lumley. Cas 1:

—, triangle de Lumley; ○, $II_{\tilde{D}} = f(III_{\tilde{D}})$.

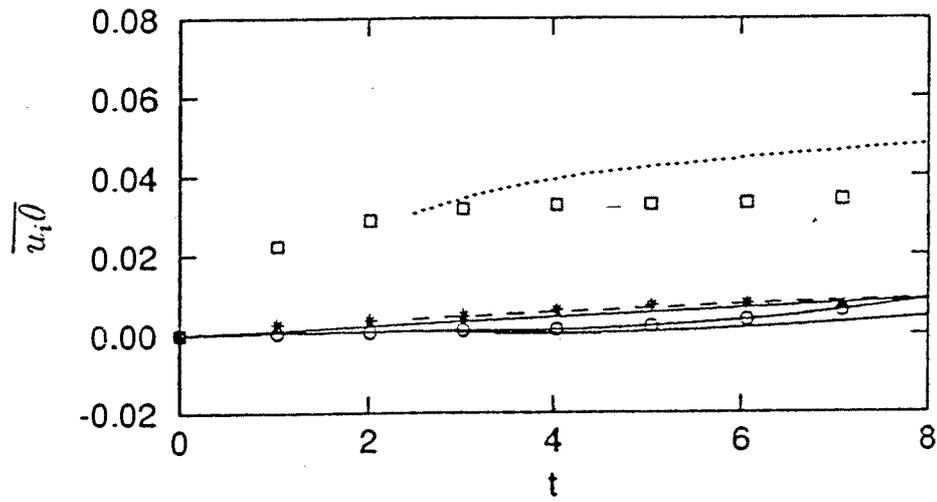


Fig.13. Evolution temporelle des flux thermiques turbulents $\overline{u_i \theta}$. Cas 2:

○, $\overline{u_1 \theta}$ LES; ◊, $\overline{u_2 \theta}$ LES; *, $\overline{u_3 \theta}$ LES,
 —, $\overline{u_1 \theta}$ modèle; ····, $\overline{u_2 \theta}$ modèle; ----, $\overline{u_3 \theta}$ modèle.

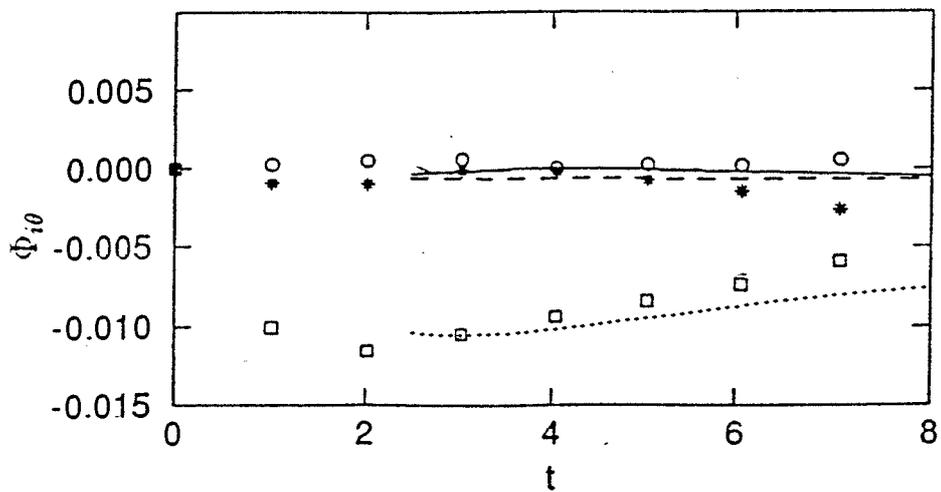


Fig.14. Evolution temporelle des corrélations pression-gradient de température $\Phi_{i\theta}$.

Cas 2:

○, $\Phi_{1\theta}$ LES; ◊, $\Phi_{2\theta}$ LES; *, $\Phi_{3\theta}$ LES,
 —, $\Phi_{1\theta}$ modèle; ····, $\Phi_{2\theta}$ modèle; ----, $\Phi_{3\theta}$ modèle.

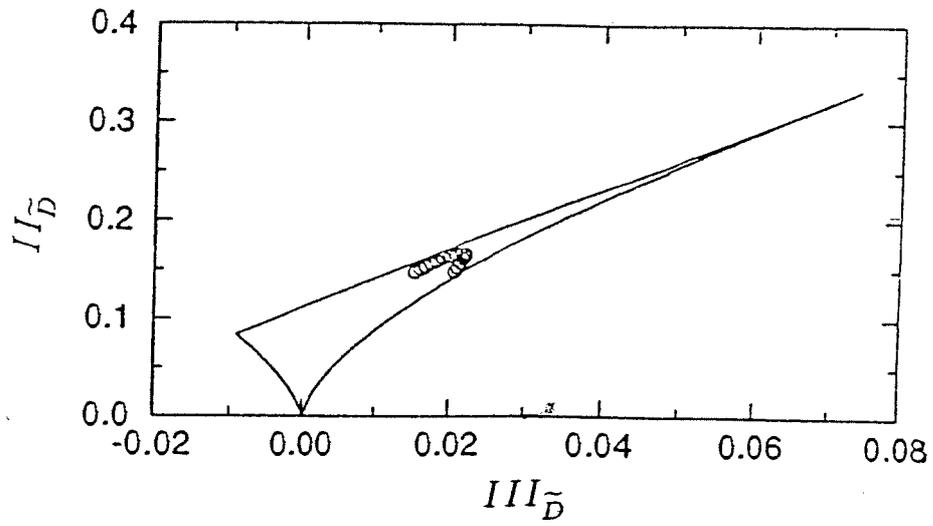


Fig.15. Diagramme de réalisabilité de Lumley. Cas 2:

—, triangle de Lumley; \circ , $II_{\bar{D}} = f(III_{\bar{D}})$.

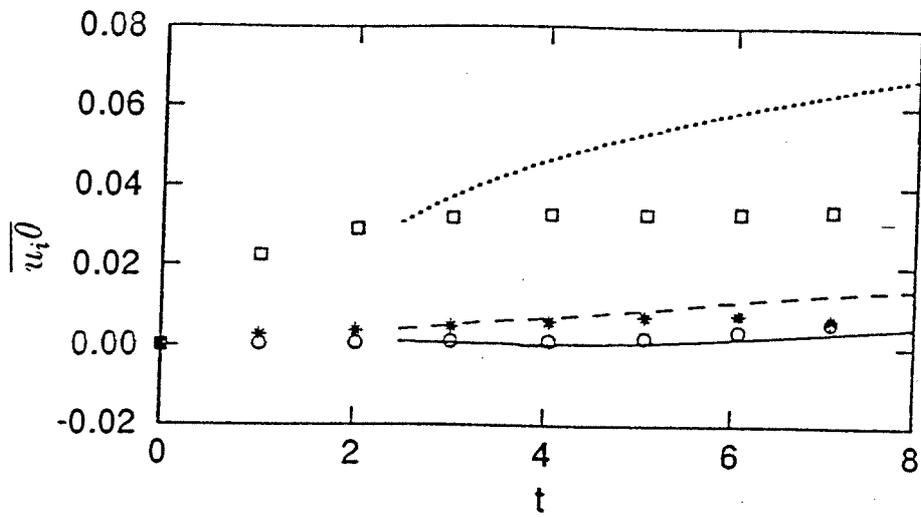


Fig.16. Evolution temporelle des flux thermiques turbulents $\overline{u_i \theta}$. Cas 3:

\circ , $\overline{u_1 \theta}$ LES; \diamond , $\overline{u_2 \theta}$ LES; $*$, $\overline{u_3 \theta}$ LES,

—, $\overline{u_1 \theta}$ modèle; \cdots , $\overline{u_2 \theta}$ modèle; ---, $\overline{u_3 \theta}$ modèle.

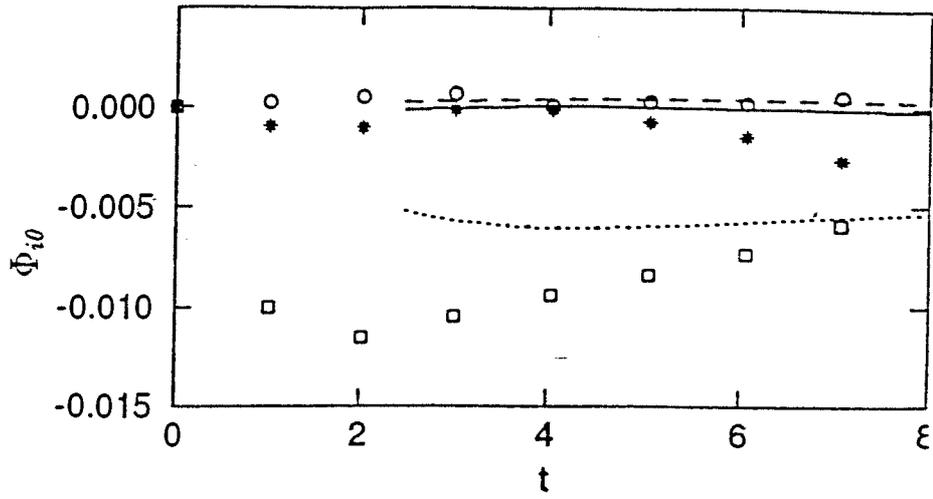


Fig.17. Evolution temporelle des corrélations pression-gradient de température $\Phi_{i\theta}$.

Cas 3:

○, $\Phi_{1\theta}$ LES; ◊, $\Phi_{2\theta}$ LES; *, $\Phi_{3\theta}$ LES,
 —, $\Phi_{1\theta}$ modèle; ····, $\Phi_{2\theta}$ modèle;---, $\Phi_{3\theta}$ modèle.

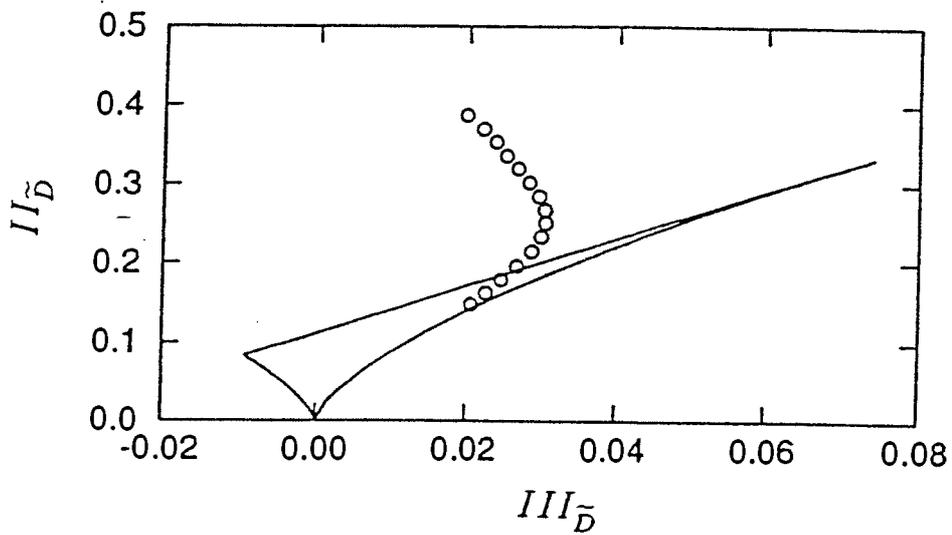


Fig.18. Diagramme de réalisabilité de Lumley. Cas 3:

—, triangle de Lumley; ○, $II_{\bar{D}} = f(III_{\bar{D}})$.

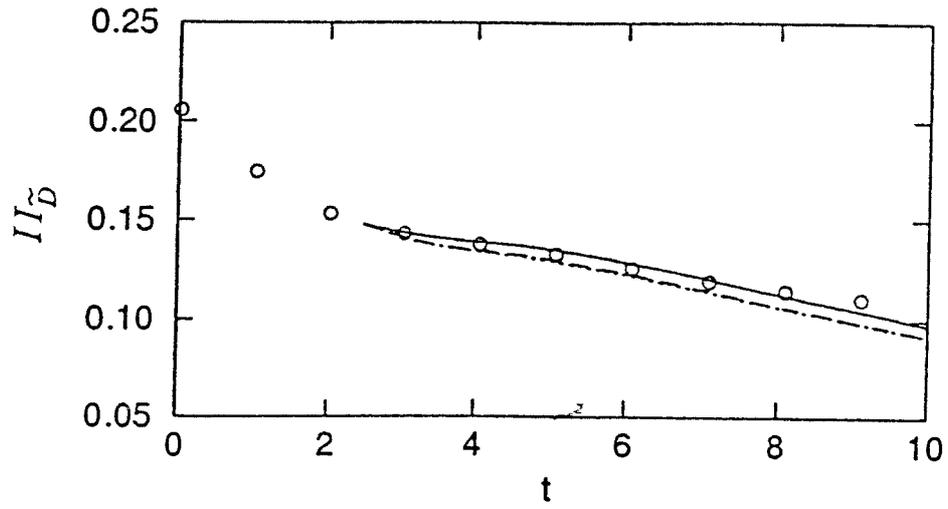


Fig.19. Evolution temporelle de l'invariant $II_{\tilde{D}}$ du tenseur D_{ij} .

....., cas1; ----, cas4; - - - , cas5; \circ , L.E.S.

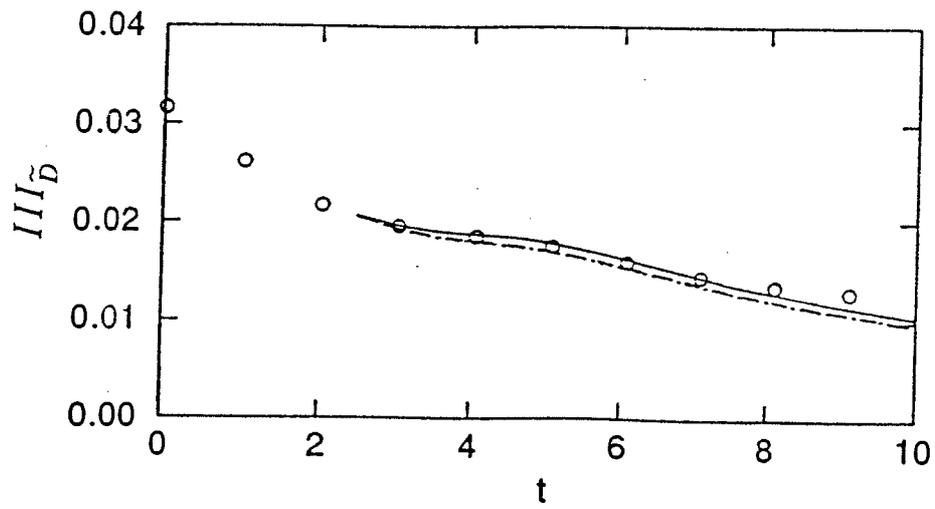


Fig.20. Evolution temporelle de l'invariant $III_{\tilde{D}}$ du tenseur D_{ij} .

....., cas1; ----, cas4; - - - , cas5; \circ , L.E.S.